Задания

Найти область определения функций:

1. $z = 2x + 3y$. ***2.*** $z = \sqrt{xy} + 4$.

3. $z = \frac{2}{x+y}$. ***4.*** $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$.

5. $z = 2 + \sqrt{x^2+y^2-16}$. ***6.*** $z = \operatorname{tg} y + x$.

7. $z = \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2-1}}$. ***8.*** $z = \frac{2x+y}{x-y+4}$.

9. $z = \ln(x+1) + \sqrt{y}$. ***10.*** $z = \ln(y - x^2) + 1$.

Построить линии уровня:

11. $z = 3x - 4y$. ***12.*** $z = x^2 + y^2$. ***13.*** $z = 4x^2 - y^2$.

14. $z = \sqrt{xy}$. ***15.*** $z = x^2 - y^2$. ***16.*** $z = 2 + x - y$.

Найти пределы:

17. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} (x+y)$. ***18.*** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 4}} (4xy+5)$. ***19.*** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} \frac{x+2y}{x^2}$.

20. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} (x-y)$. ***21.*** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin(xy)}{x}$. ***22.*** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin(x^2y)}{x^3}$.

23. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\operatorname{tg}(x/y)}{x}$. ***24.*** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{\operatorname{tg}(3xy)}{4x}$. ***25.*** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{x}{\operatorname{tg}(xy)}$.

14.35. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 4}} \frac{\sin(xy)}{\sin(x^2y)}$.

Найти частные производные первого порядка:

14.36. $z = x^2y + y^3 - 4$. ***14.37.*** $z = \sin(xy)$. ***14.38.*** $z = e^{xy}$.

14.39. $z = x^4y + y^2 + 2$. ***14.40.*** $z = \sqrt{x+3y}$. ***14.41.*** $z = \sqrt[5]{3x^2y}$.

14.42. $z = x\sin(x^2y)$. ***14.43.*** $z = \frac{x+2y}{x-3y}$. ***14.44.*** $z = (x+2y)^4$.

14.45. $z = \sqrt{x^3y^2}$. ***14.46.*** $z = x^3y + x^2 - 5$. ***14.47.*** $z = 2^{x/y}$.

14.48. $z = \cos^2(xy^2)$. ***14.49.*** $z = \sqrt[4]{x-y}$. ***14.50.*** $z = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$.

14.51. $z = \arccos\sqrt{xy}$.

Найти полный дифференциал первого порядка:

1. $z = x^2 + y^3$. ***2.*** $z = 4xy^2$. ***3.*** $z = x - y + 4$.

4. $z = x\cos(xy)$. ***5.*** $z = x^y$. ***6.*** $z = y^x$.

7. $z = x^2 + y^2 - 4$. ***8.*** $z = x^{y^2}$. ***9.*** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

10. $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$. ***11.*** $z = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$. ***12.*** $z = \frac{3x}{\sqrt{y}}$.

Найти градиент функции и его длину в заданной точке:

13. $M_0(4; 3)$, $z = 2x + 3y$. ***14.*** $M_0(0; 2)$, $z = x^y$.

15. $M_0(3; 2)$, $z = 5x - 6y + 4$. ***16.*** $M_0(0; 2)$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

17.. $M_0(2; 1)$, $z = 4y - 5x$. ***18.*** $M_0(3; 4)$, $z = 5x + 6y - 7$.

19. $M_0(3; 1)$, $z = 3x^2 - 7y^3 + 5$. ***20.*** $M_0(1; 5)$, $z = 4x - y^2$.

21. $M_0(5; 2)$, $z = 6\sqrt{x} - \frac{7}{\sqrt{y}} + 4$. ***22.*** $M_0(4; 3)$, $z = 3x^2 + 6y^2 - 5xy + 2$.

Найти производные по направлению $\vec{l}$:

23. $z = x^2 + y^2$, $\vec{l}(1; 2)$. ***24.*** $z = 3x - 4y$, $\vec{l}(2; 4)$.

25. $u = x^2 - 2y^2 + xy + z$, $\vec{l}(1; 1; 1)$. ***26.*** $u = x^2 - y^2 + z^3$, $\vec{l}(1; 2; 1)$.

27. $u = 2x^3 - 3y^2 + xz - z^3$, $\vec{l}(1; 2; 4)$. ***28.*** $u = 3x + 4y - z$, $\vec{l}(1; 2; 3)$.

29. $u = x^2 + y^2 - z + 4$, $\vec{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $M_1(1; 0; 3)$, $M_2(3; 1; 8)$.

30. $u = 4x - 5y + z + 4$, $\vec{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $M_1(2; -1; 3)$, $M_2(3; -1; 7)$.

Вычислить приближенно, используя полный дифференциал:

31. $\sqrt{(1,01)^2 + (2,97)^2}$. ***32.*** $\sqrt{(3,95)^2 + (5,01)^2}$.

33. $(1,99)^{2,01}$. ***34.*** $(1,98)^{2,03}$ ***35.*** $\ln(1,98)^{2,03}$.

36. $(1,99)^2(2,03)^3$. ***37.*** $\sqrt{(2,01)^2 + (1,04)^2 + (1,99)^2}$.

38. $\frac{1}{\sqrt{(2,01)^2 + (1,02)^2 + (1,90)^2}}$. ***39.*** $(1,01)(2,01)^2(3,04)^3$.

40. $(1,01)^2(2,03)^2(4,01)^3$. ***41.*** $(1,03)^3\sqrt{(3,04)^2 + (4,01)^2}$.

Найти частные производные второго порядка:

42. $z = x^2 y^3$. ***43.*** $z = x^2 + y^2 - 3xy$. ***44.*** $z = 2^{xy}$.

45. $z = 3^{x^2 y}$. ***46.*** $z = e^{xy}$. ***47.*** $z = e^{x/y}$.

48. $z = \cos(x + y)$. ***49.*** $z = \ln(xy)$. ***50.*** $z = \dfrac{x+y}{x-y}$.

51. $z = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 - 4$.

52. Найти $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3}$ для функции $z = e^{xy}$.

53. Найти дифференциалы второго порядка для функций, заданных в примерах 14.94-14.100.

Найти дифференциалы третьего порядка:

54. $z = e^x + e^y - xy + 2$. ***55.*** $z = x^4 y^3$.

56. $z = 2x^4 + xy^2$. ***57.*** $z = 3y^2 + 4x^3$.

Исследовать функции на экстремум:

59. $z = 3xy - 3x - 6y$.

60. $z = x^2 + y^2 - 2x + 8y$.

61. $z = x^2 + 2y^2 + 4x - 12y$.

62. $z = x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - 6y - 80$.

63. $z = 3x^2 - 4xy + y^2 - 8x + 10y - 5$.

64. $z = -x^2 + 5xy - y^2 + 6x - 7y + 2$.

65. $z = -x^3 + 3xy^2 - 12x - 16y$.

66. $z = -x^2 + y^2 - 4xy + 2x - 6y + 2$.

67. $z = -x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10$.

68. $z = -2x^2 + 6y^2 - 3xy + 5x - 3y + 2$.

69. $z = xy^2 (1 - x - y)$.

70. $z = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3}$.

71. $z = x^2 + y^2 - 8 \ln x - 54 \ln y + 2$.

Найти условный экстремум функции:

72. $z = 4 - 2x - 6y$ при $x^2 + 4y^2 = 8$.

73. $z = 10 - 6x - 12y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

74. $z = x^2 - y^2$ при $x + 2y - 3 = 0$.

75. $z = x^2 - 4y^2$ при $x + y - 1 = 0$.

76. $z = x^2 + y^2$ при $x - 4y - 17 = 0$.

77. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 4y + 2$ при $x + y = 4$.

78. $z = x^2 + 4y^2 - 2xy + 4x + y - 3$ при $x + 2y = 1$.

79. $z = x^2 + y^2 + 8xy - 4x - 6y - 7$ при $x - y = 4$.

Рассчитать оптимальный объем выпуска продукции для производителя, оптимальную цену в целом и распределение производственной программы по фирмам.

80. $F_1(x) = 0{,}2x^2 + 3x + 200$;
$F_2(y) = 0{,}1y^2 + 3y + 900$;
$z_2 = 1000 - 2p$.

81. $F_1(x) = 0{,}2x^2 + 4x + 500$;
$F_2(y) = 0{,}4y^2 + 2y + 700$;
$z_2 = 1200 - 4p$.

82. $F_1(x) = 0{,}1x^2 + 2x + 600$;
$F_2(y) = 0{,}1y^2 + 4y + 900$;
$z_2 = 1600 - 2p$.

82. $F_1(x) = 0{,}1x^2 + 6x + 400$;
$F_2(y) = 0{,}2y^2 + 3y + 1200$;
$z_2 = 1400 - 4p$.

83. $F_1(x) = 0{,}2x^2 + 4x + 200$;
$F_2(y) = 0{,}1y^2 + 8y + 1500$;
$z_2 = 1600 - 4p$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области:

84. $z = x^2 + y^2 - xy + 6x - 7y + 10$ в области D: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \leq 8$.

85. $z = x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 5y - 6$ в области D: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $4x + y \leq 4$.

86. $z = x^2 + y^2 - xy + x + 5y + 2$ в области D: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 4$, $y \leq 4$.

87. $z = x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x + y - 6$ в области D: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 4$, $y \leq 4$.

88. $z = x^2 + 6y^2 - xy + 5x - y + 2$ в области D: $x \geq 0$, $y \geq x$, $y \leq 6$.

89. $z = x^2 + 4y^2 - 2xy + 5x - y + 6$ в области D: $x \geq 0$, $y \geq x$, $y \leq 8$.

90. $z = x^2 + 2y^2 - 4xy + 6x + 5y - 2$ в области D: $x \geq 0$, $y \leq x$, $x \leq 4$.

91. $z = x^2 + y^2 - 4x + 5y + 6$ в области D: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 4 - x$, $x \leq 2$.

Найти $E_x(z)$ и $E_y(z)$ для производственной функции z в точке M и сделать выводы:

92. $z = 5x^3 - 2xy + 5y$, $M(1; 2)$. ***93.*** $z = x^3 - 4xy + 6y$, $M(2; 3)$.

94. $z = x^3 + xy + 2y$, $M(1; 2)$. ***95.*** $z = x^3 - xy + 3y$, $M(2; 2)$.

96. $z = 4x^3 - 5xy + 8y - 6$, $M(1; 4)$. ***97.*** $z = 4x^3 - xy + y + 3$, $M(1; 2)$.

98. $z = x^3 - 2x + y$, $M(2; 4)$. ***99.*** $z = 2x^3 + 4xy$, $M(2; 7)$.

100. $z = 4x^4 - 5xy + 6$, $M(7; 2)$. ***101.*** $z = 3x^3 + 6xy + 2$, $M(2; 3)$.

Методом наименьших квадратов найти зависимость $\boldsymbol{y = ax}$ по результатам обследований, приведенным в таблицах:

102.

x	1	2	3	4	5
y	1	3	4	6	7

103.

x	2	4	5	7
y	3	5	6	8

104.

x	1	2	3	4	5
y	6	3	0	–1	–2

105.

x	1	2	3	4	5
y	1	3	5	6	8

Методом наименьших квадратов найти зависимость $\boldsymbol{y = ax + b}$:

106.

x	–1	–2	0	1	2
y	3	2	1	4	3

107.

x	1	2	3	4	5
y	6	7	8	9	10

108.

x	1	2	3	4	5
y	4	5	7	8	9

109.

x	1	2	3	4	5
y	2	3	4	4	6

110.

x	1	2	3	4	5	6
y	4	5	5	6	7	8

111.

x	2	3	4	5	6
y	2	4	5	6	7

112.

x	1	2	3	5
y	2	3	4	5